

Campo Elétrico e Força Elétrica e Lei de Gauss - II

Professor: Rodrigo Jordão

Resumo

Lei de Gauss na Forma Diferencial

Como foi visto na aula passada:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Sendo que, pelo Teorema da Divergência:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Sabemos também que:

$$q_{int} = \int \rho \cdot dV$$

Então,

$$\int (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Com isso, concluímos que:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Rotacional de E

Seja um campo gerado por uma partícula qualquer no espaço. A integral do Campo em um caminho l entre dois pontos A e B é:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin(\theta) d\phi \hat{\phi}$$

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Se a integral for fechada, ou seja,

$$\int_a^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Pelo Teorema de Stokes, concluímos que:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Campo Elétrico de um Plano Infinito Uniformemente Carregado

Seja um plano com densidade de carga igual a $\sigma = q_{int}/A$.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Considerando um infinitésimo de área envolvido por um paralelepípedo, o fluxo total será a soma do fluxo na base inferior e superior:

$$\oint E \cdot dA = E_1 \cdot \oint dA + E_2 \cdot \oint dA = E_1 A + E_2 A = EA + EA = 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Logo,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Campo Elétrico de um Fio Infinito Uniformemente Carregado

Seja um fio eletricamente carregado, com densidade de carga $\lambda = Q/L$, envolvido por uma superfície Gaussiana cilíndrica, sabemos que:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

O fluxo de campo ocorre apenas na lateral do cilindro, logo:

$$E \int dA = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi s L) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Sendo s o raio da base do cilindro e L o comprimento do cilindro. Logo,

$$E = \frac{\lambda}{2\pi s \epsilon_0}$$

Campo Elétrico de uma Carga Puntiforme Pela Lei de Gauss

Se considerarmos uma esfera como a superfície gaussiana de uma carga puntiforme podemos provar que o campo elétrico de uma carga puntiforme é igual a:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Como já havíamos visto.

Teorema de Earnshaw

O teorema de Earnshaw afirma que um conjunto de cargas pontuais não podem se manter em equilíbrio estável, exclusivamente por sua interação eletrostática.